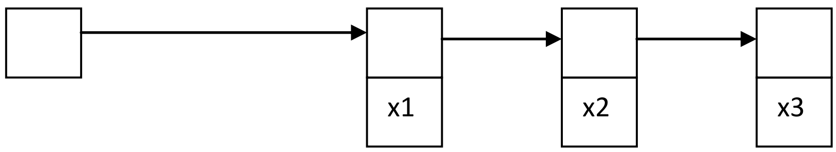
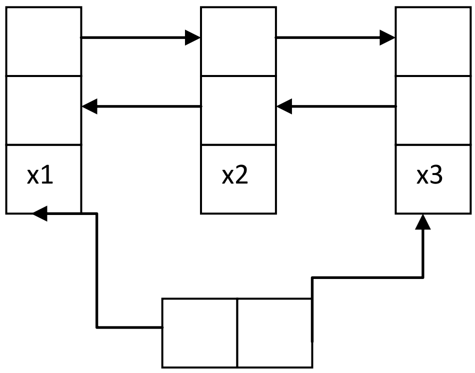
Aufgabe 2.1: Doppelt verkettete Listen
Doppelt verkettete Listen sollen Arrays ersetzen

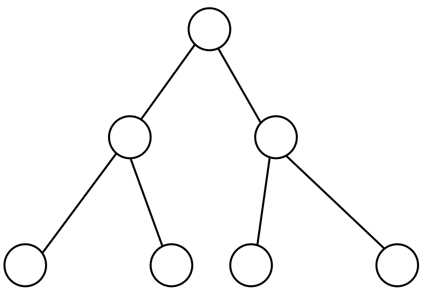
Normal verkettete Liste



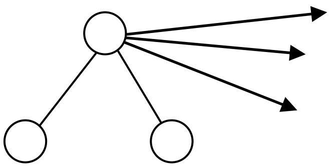
Doppelt verkettete Liste



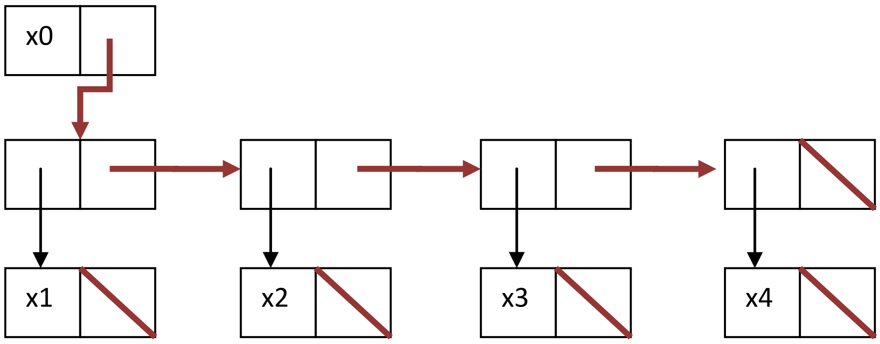
Aufgabe 2.2: Darstellung von Bäumen m-ten Grades
Knoten haben maximal m Teilbäume (der Grad eines Knotens ist maximal m)



d << m



Als verkettete Liste:



Rot: Overhead-Pointer

a)

k: deg(k) + 1 Overhead-Pointer

b)

$$\sum_{k \in K} \deg(k) = n - 1$$

n: Anzahl der Knoten

Jeder Knoten erhöht den Grad des Vaterknotens (außer bei der Wurzel) um 1.

c)

Anzahl der Overhead-Pointer in k = deg(k) + 1 (aus (a))

$\sum_{k \in K} \deg(k) = n - 1$ (aus (b))

$$\sum_{k \in K} (\deg(k) + 1) = \sum_{k \in K} \deg(k) + \sum_{k \in K} 1 = n - 1 + n = 2n - 1$$

Anzahl der Overhead-Pointer im Baum: $2n - 1$

Anzahl der Pointer im Baum = $(2n - 1) + (n - 1) = 3n - 2$

$$Speicherplatzverschwendung = \frac{2n - 1}{3n - 2}$$

$n = 10$: $\frac{19}{28} \approx 68\%$

$n = 200$: $\frac{399}{398} \approx 67\%$

$n = 5000$: $\frac{9999}{14998} \approx 67\%$

Aufgabe 2.3: Eigenschaften allgemeiner Bäume

$d \geq 2$

a)

Level des Sohnes ist Level des Vaters + 1

$M(i) = \text{"}maximale\ Anzahl\ Knoten\ x\ mit\ lev(x) = i\text{"} = d^{i-1}$

Beweis (mit Induktion über i):
Behauptung: $M(i) = d^{i-1}$

Induktionsanfang:
i = 1 ➔ x ist Wurzel M(1) = d^0 = 1

Induktionsschluß:
Level i: d^{i-1} Knoten
M(i+1) = M(i) * d = d^{i-1} * d = d^i = $d^{(i-1)+1}$

b)

$A(k) = \text{"}maximale\ Anzahl\ Knoten\ x\ in\ einem\ Baum\ der\ Höhe\ h\ vom\ Grad\ d\text{"}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} d^i = \frac{d^n - 1}{d - 1} (geometrische\ Reihe)$$

Induktionsanfang:
h = 1 ➔ A(1) = 1 = $\frac{d^1-1}{d-1}$

Induktionsschluß:
$A(h) = \frac{d^n-1}{d-1}$
aus (a): $M(h) = d^{n-1}$

$$A(h+1) = A(h) + M(h+1) = \frac{d^n - 1}{d - 1} + d^n = \frac{d^n - 1 + d^n(d-1)}{d - 1} = \frac{d^{(n+1)} - 1}{d - 1}$$

c)

➔ maximale Höhe = n (lineare Liste)

d)

$A(h-1) < n \leq A(h)$ (aus (b))

$$\frac{d^{n-1} - 1}{d - 1} < n \leq \frac{d^n - 1}{d - 1}$$

$$d^{n-1} - 1 < n(d-1) + 1 \leq d^n$$

$$h - 1 < log_d(n(d-1) + 1) \leq h$$

➔ $h = \lceil log_d(n(d-1) + 1) \rceil$